

平成 28 年度

[ 数 学 ]

問 題 用 紙

|      |        |
|------|--------|
| 試験時間 | 90分    |
| 問題用紙 | 1 ～ 6頁 |

注 意 事 項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁，乱丁，印刷の不鮮明な箇所があったら，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても，または試験を放棄する場合でも，試験終了までは退場できない。
4. 机には，受験票と筆記用具および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。
5. 筆記用具は鉛筆，シャープペンシル，消しゴムのみとする。  
(コンパス，定規等は使用できない。)
6. 止むを得ず下敷を使用する場合は，監督者の許可を得ること。
7. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
8. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
9. この問題用紙の余白は草稿等に自由に用いてよい。
10. 耳栓の使用はできない。
11. 携帯電話等の電源は必ず切り，鞆の中にしまうこと。
12. 質問，用便，中途退室など用件のある場合は，無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
13. 受験中不正行為があった場合は，試験の一切を無効とし，試験終了時間まで別室で待機を命じる。
14. 退室時は，試験問題および解答用紙を裏返しにすること。
15. 試験終了後，この問題用紙は持ち帰ること。

|      |  |
|------|--|
| 受験番号 |  |
|------|--|

|     |  |
|-----|--|
| 氏 名 |  |
|-----|--|

[ I ] 次の各問いの答えのみを解答用紙に記せ。

問1 円に内接する四角形 ABCD において、 $AB = 1 + \sqrt{3}$ ,  $BC = CD$ ,  $DA = 2$ , また  $\angle DAB = 60^\circ$  である。四角形 ABCD の対角線の交点を P,  $\angle BCD$  の二等分線と辺 AB との交点を Q, BD と CQ の交点を R とするとき、以下の各問いに答えよ。なお数値の分母は有理化すること。

- (1) 辺 BD の長さを求めよ。
- (2)  $\angle ABD$  の大きさを求めよ。
- (3) 辺 BP の長さを求めよ。
- (4) 三角形 PQR の内接円の半径を求めよ。

問2 自然数  $n$  に対して、 $n$  を 3 で割った余りを  $a_n$ ,  $n^2$  を 3 で割った余りを  $b_n$  とするとき、以下の各問いに答えよ。

- (1)  $\sum_{n=1}^{2016} (a_n + b_n)$  の値を求めよ。
- (2)  $\sum_{n=1}^m (a_{n+2} + b_{n+1} + 2a_n) = 2016$  を満たす自然数  $m$  の値を求めよ。

問3 O を原点とする座標平面上に、次のような双曲線  $C$  と直線  $l_k$  ( $k$  は実数の定数) が与えられているとき、以下の各問いに答えよ。

$$C : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = -1 \qquad l_k : 3x - 4y + k = 0$$

- (1)  $C$  と  $l_k$  が接するような  $k$  の値を求めよ。
- (2)  $C$  上の点と直線  $l_0 : 3x - 4y = 0$  の距離の最小値を求めよ。

(計算用紙)

[ II ] 次の関数  $f(x)$  (ただし  $x > 0$ ) に関する以下の各問いに答えよ。

$$f(x) = \int_1^x t(x-t+1)e^{-(x-t+1)^2} dt$$

問1  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  を求めよ。

問2 関数  $g(x)$  を  $g(x) = \frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-x^2})$  とするとき、 $f(x)$  と  $g(x)$  の  $x > 0$  における大小関係を調べよ。

問3 問2の  $g(x)$  に対して、傾きが  $f'(x) - g'(x)$  の  $x = \sqrt{2}$  における値に等しく、点  $(1, 0)$  を通る直線を考えることにより、不等式

$$0.115 < f(\sqrt{2}) < 0.165$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $0.367 < e^{-1} < 0.368$ 、 $0.135 < e^{-2} < 0.136$  であることは用いてよい。

(計算用紙)

[ III ] 座標平面上の2点  $P(t, t^2)$ ,  $Q(t-5, t^2-4t+2)$  に対して,  $t$  が  $1 \leq t \leq 3$  の範囲を動くとき, 以下の各問いに答えよ。

問1 線分  $PQ$  を表す直線の方程式および定義域を,  $t$  を用いて表せ (答えのみでよい)。

問2 線分  $PQ$  が通過する範囲  $D$  を求め, 図示せよ。

(計算用紙)